

§4. 2 用向量方法研究立体几何中的位置关系

【学习目标】

- 1.能用向量语言表述直线与直线、直线与平面、平面与平面平行与垂直的关系.
- 2.能用向量方法判断或证明直线、平面间的平行与垂直的关系.

【重点难点】

重点：能用向量语言表述直线与直线、直线与平面、平面与平面平行与垂直的关系.

难点：能用向量方法判断或证明直线、平面间的平行与垂直的关系.

【导学流程】

一、问题导入

观察图片，旗杆底部的平台和地面平行，旗杆所在的直线和护旗战士所在的直线平行. 而且旗杆所在的直线和水平地面垂直，旗杆所在直线的方向向量和护旗战士所在直线的方向向量及水平地面的法向量有什么关系？



◇探究一 平行关系

问题 1 设直线 l, m 的方向向量分别为 $\boldsymbol{l}, \boldsymbol{m}$ ，平面 α ，平面 β 的法向量分别为 $\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2$ ，若 $l \parallel m, l \parallel \alpha, \alpha \parallel \beta$ ，那么其方向向量与法向量具有怎样的关系？

问题 2 能否用向量法证明平行关系？应注意什么？

【知识梳理】

设向量 $\boldsymbol{l}, \boldsymbol{m}$ 分别是直线 l, m 的方向向量， $\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2$ 分别是平面 α, β 的法向量，则

$$\begin{aligned} l \parallel m \text{ 或 } l \text{ 与 } m \text{ 重合} &\Leftrightarrow \boldsymbol{l} \parallel \boldsymbol{m}; \\ l \parallel \alpha \text{ 或 } l \subset \alpha &\Leftrightarrow \boldsymbol{l} \perp \boldsymbol{n}_1; \\ \alpha \parallel \beta \text{ 或 } \alpha \text{ 与 } \beta \text{ 重合} &\Leftrightarrow \boldsymbol{n}_1 \parallel \boldsymbol{n}_2. \end{aligned}$$

注意点：

(1)利用空间向量证明线面平行一般有三种方法：

方法一：证直线方向向量与平面内任意两个不共线的向量共面，即可用平面内的一组基表示.

方法二：证直线方向向量与平面内某一向量共线，转化为线线平行，利用线面平行判定定理得证.

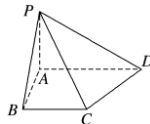
方法三：求直线的方向向量，再求平面的法向量，证明直线的方向向量与平面的法向量垂直.

(2)若证面面平行，则证两平面的法向量平行.

例1 在四棱锥 $P-ABCD$ 中，四边形 $ABCD$ 是正方形，侧棱 PD 垂直于底面 $ABCD$ ， $PD=DC$ ， E 是 PC 的中点。证明： $PA \parallel$ 平面 EDB 。

延伸探究 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中， $PA \perp$ 底面 $ABCD$ ，底面 $ABCD$ 为直角梯形， $\angle ABC = \angle BAD = 90^\circ$ ， $PA = AB = BC = \frac{1}{2}AD = 1$ 。问：在棱 PD 上是否存在一点 E ，使得 $CE \parallel$ 平面 PAB ？

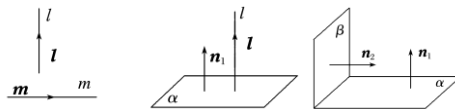
若存在，求出 E 点的位置，若不存在，请说明理由。



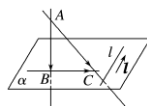
跟踪训练1 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为2， E ， F 分别是 BB_1 ， DD_1 的中点，求证：平面 $ADE \parallel$ 平面 B_1C_1F 。

◇探究二 垂直关系

问题3 如图，根据直线、平面的位置关系，判断直线的方向向量、平面的法向量有什么关系？



问题4 如图所示， $AB \perp \alpha$ ，垂足为点 B ， $AC \cap \alpha = C$ ， $l \subset \alpha$ ，且 $l \perp BC$ ，由向量法能否得到 $l \perp AC$ 。



【知识梳理】

1. 设向量 l ， m 分别是直线 l ， m 的方向向量， n_1 ， n_2 分别是平面 α ， β 的法向量，则

$$l \perp m \Leftrightarrow l \perp m; l \perp \alpha \Leftrightarrow l \parallel n_1; \alpha \perp \beta \Leftrightarrow n_1 \perp n_2.$$

2. 三垂线定理及其逆定理

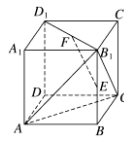
(1)三垂线定理：若平面内的一条直线与平面的一条斜线在这个平面内的_____垂直，则它也和这条_____垂直。

(2)三垂线定理的逆定理：若平面内的一条直线和这个平面的一条_____垂直，则它也和这条斜线在这个平面内的_____垂直。

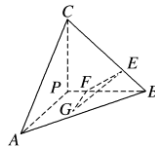
注意点：(1)若证面面垂直，则证两平面的法向量垂直。

(2)证明线面垂直的方法：①基向量法②坐标法③法向量法

例2 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E, F 分别是 BB_1, D_1B_1 中点. 求证: $EF \perp$ 平面 B_1AC .

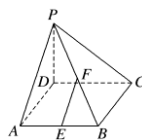


跟踪训练2 如图, 在正三棱锥 $P-ABC$ 中, 三条侧棱两两互相垂直, G 是 $\triangle PAB$ 的重心, E, F 分别为 BC, PB 上的点, 且 $BE:EC=PF:FB=1:2$. 求证: 平面 $GEF \perp$ 平面 PBC .



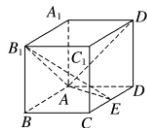
◇探究三 平行与垂直的综合应用

例3 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PD \perp$ 底面 $ABCD$, 底面 $ABCD$ 为正方形, $PD=DC$, E, F 分别是 AB, PB 的中点.



- (1) 求证: $EF \perp CD$;
- (2) 在平面 PAD 内求一点 G , 使 $GF \perp$ 平面 PCB , 并证明你的结论.

跟踪训练3 如图, 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AA_1=AD=1$, E 为 CD 的中点.



- (1) 求证: $B_1E \perp AD_1$;
- (2) 在棱 AA_1 上是否存在一点 P , 使得 $DP \parallel$ 平面 B_1AE ? 若存在, 求 AP 的长; 若不存在, 说明理由.

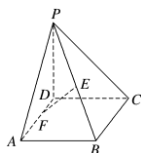
三、随堂演练

1. 若平面 α, β 的法向量分别为 $\mathbf{a}=(2, -1, 0)$, $\mathbf{b}=(-1, -2, 0)$, 则 α 与 β 的位置关系是 ()
 A. 平行 B. 垂直 C. 相交但不垂直 D. 无法确定
2. 已知向量 $\mathbf{a}=(2, 4, 5)$, $\mathbf{b}=(3, x, y)$ 分别是直线 l_1, l_2 的方向向量, 若 $l_1 \parallel l_2$, 则 ()
 A. $x=6, y=15$ B. $x=3, y=\frac{15}{2}$ C. $x=3, y=15$ D. $x=6, y=\frac{15}{2}$

3. (多选)若直线 l 的方向向量为 \mathbf{a} , l 不在平面 α 内, 平面 α 的法向量为 \mathbf{n} , 能使 $l \parallel \alpha$ 的是 ()

- A. $\mathbf{a}=(1,0,0)$, $\mathbf{n}=(0,-2,0)$ B. $\mathbf{a}=(1,3,5)$, $\mathbf{n}=(1,0,1)$
C. $\mathbf{a}=(0,2,1)$, $\mathbf{n}=(-1,0,-1)$ D. $\mathbf{a}=(1,-1,3)$, $\mathbf{n}=(0,3,1)$

4. 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 是边长为 1 的正方形, $PD \perp$ 底面 $ABCD$, 且 $PD=1$, 若 E, F 分别为 PB, AD 的中点, 则直线 EF 与平面 PBC 的位置关系是_____.



四、课堂小结

- 知识清单: (1)平行关系. (2)垂直关系. (3)与平行、垂直有关的存在性问题.
- 方法归纳: 坐标法、转化与化归.
- 常见误区: 通过向量和平面平行直接得到线面平行, 忽略条件直线不在平面内.

五、布置作业 (课时对点练)

基础巩固

1. 设 l_1 的一个方向向量为 $\mathbf{a}=(1,3,-2)$, l_2 的一个方向向量为 $\mathbf{b}=(-4,3,m)$, 若 $l_1 \perp l_2$, 则 m 等于()

- A. 1 B. $\frac{5}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. 3

2. 设直线 l 的方向向量是 \mathbf{a} , 平面 α 的法向量是 \mathbf{n} , 则 “ $\mathbf{a} \perp \mathbf{n}$ ” 是 “ $l \parallel \alpha$ ” 的()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

3. 已知直线 l 的方向向量是 $\mathbf{a}=(3,2,1)$, 平面 α 的法向量是 $\mathbf{u}=(-1,2,-1)$, 则 l 与 α 的位置关系是()

- A. $l \perp \alpha$ B. $l \parallel \alpha$ C. l 与 α 相交但不垂直 D. $l \parallel \alpha$ 或 $l \subset \alpha$

4. (多选)下列利用方向向量、法向量判断线、面位置关系的结论中, 正确的是()

- A. 两条不重合的直线 l_1, l_2 的方向向量分别是 $\mathbf{a}=(2,3,-1)$, $\mathbf{b}=(-2,-3,1)$, 则 $l_1 \parallel l_2$
B. 直线 l 的方向向量 $\mathbf{a}=(1,-1,2)$, 平面 α 的法向量是 $\mathbf{u}=(6,4,-1)$, 则 $l \perp \alpha$
C. 两个不同的平面 α, β 的法向量分别是 $\mathbf{u}=(2,2,-1)$, $\mathbf{v}=(-3,4,2)$, 则 $\alpha \perp \beta$
D. 直线 l 的方向向量 $\mathbf{a}=(0,3,0)$, 平面 α 的法向量是 $\mathbf{u}=(0,-5,0)$, 则 $l \parallel \alpha$

5. 如图 1, 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, M, N 分别为 A_1B, AC 的中点, 则 MN 与平面 BB_1C_1C 的位置关系是()

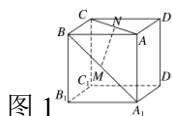


图 1

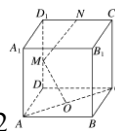


图 2

- A. 相交 B. 平行 C. 垂直 D. 不能确定

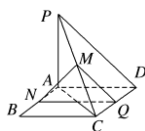
6. (多选)如图 2, 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, O 是底面 $ABCD$ 的中心, M, N 分别是棱 DD_1, D_1C_1 的中点, 则直线 OM ()

- A. 和 AC 垂直 B. 和 AA_1 垂直 C. 和 MN 垂直 D. 与 AC, MN 都不垂直

7. 已知平面 α 内的三点 $A(0,0,1), B(0,1,0), C(1,0,0)$, 平面 β 的一个法向量为 $\mathbf{n}=(-1, -1, -1)$, 且 β 与 α 不重合, 则 β 与 α 的位置关系是_____.

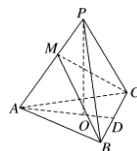
8. 在 $\triangle ABC$ 中, $A(1, -2, -1), B(0, -3,1), C(2, -2,1)$. 若向量 \mathbf{n} 与平面 ABC 垂直, 且 $|\mathbf{n}|=\sqrt{21}$, 则 \mathbf{n} 的坐标为_____.

9. 如图所示, 四边形 $ABCD$ 为矩形, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $PA=AD$, M, N, Q 分别是 PC, AB, CD 的中点.



- (1) 求证: $MN \parallel$ 平面 PAD ;
(2) 求证: 平面 $QMN \parallel$ 平面 PAD .

10. 如图所示, 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $AB=AC$, D 为 BC 的中点, $PO \perp$ 平面 ABC , 垂足 O 落在线段 AD 上, 已知 $BC=8, PO=4, AO=3, OD=2$.



- (1) 证明: $AP \perp BC$;
(2) 若点 M 是线段 AP 上一点, 且 $AM=3$, 求证: 平面 $AMC \perp$ 平面 BMC .

综合运用

11. 如图 3, 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, PQ 与直线 A_1D 和 AC 都垂直, 则直线 PQ 与 BD_1 的关系是()

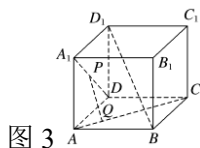


图 3

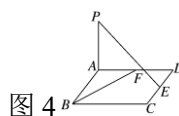


图 4

- A. 异面直线 B. 平行直线 C. 垂直不相交 D. 垂直且相交

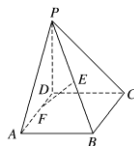
12.如图4, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, 四边形 $ABCD$ 为正方形, E 是 CD 的中点, F 是 AD 上一点, 当 $BF \perp PE$ 时, $AF:FD$ 的比值为()

- A. $\frac{1}{2}$ B. 1 C. 3 D. 2

13. 已知两个不重合的平面 α 与平面 ABC , 若平面 α 的法向量为 $\mathbf{n}_1 = (2, -3, 1)$, $\vec{AB} = (1, 0, -2)$, $\vec{AC} = (1, 1, 1)$, 则()

- A. 平面 $\alpha \parallel$ 平面 ABC B. 平面 $\alpha \perp$ 平面 ABC
C. 平面 α 、平面 ABC 相交但不垂直 D. 以上均有可能

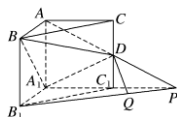
14.如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PD \perp$ 底面 $ABCD$, 底面 $ABCD$ 是正方形, $AB=2$, E 是 PB 的中点, $\cos \langle \vec{DP}, \vec{AE} \rangle = \frac{\sqrt{3}}{3}$.



- (1)建立适当的空间直角坐标系, 则点 E 的坐标是_____;
(2)在底面 $ABCD$ 内求一点 F , 使 $EF \perp$ 平面 PCB , 则点 F 的坐标是_____. (答案不唯一)

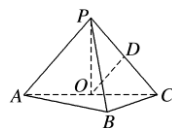
拓广探究

15.如图, 在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 侧棱 $AA_1 \perp$ 底面 $A_1B_1C_1$, $\angle BAC = 90^\circ$, $AB = AC = AA_1 = 1$, D 是棱 CC_1 的中点, P 是 AD 的延长线与 A_1C_1 的延长线的交点, 若点 Q 在线段 B_1P 上, 则下列结论正确的是()



- A. 当点 Q 为线段 B_1P 的中点时, $DQ \perp$ 平面 A_1BD
B. 当点 Q 为线段 B_1P 的三等分点时, $DQ \perp$ 平面 A_1BD
C. 在线段 B_1P 的延长线上, 存在一点 Q , 使得 $DQ \perp$ 平面 A_1BD
D. 不存在 DQ 与平面 A_1BD 垂直

16.如图, 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $AB \perp BC$, $AB = BC = kPA$, 点 O, D 分别是 AC, PC 的中点, $OP \perp$ 底面 ABC .



- (1)求证: $OD \parallel$ 平面 PAB ;
(2)当 k 取何值时, O 在平面 PBC 内的射影恰好为 $\triangle PBC$ 的重心?